El Modelo de Crecimiento con Agentes Heterogéneos

Mauricio Tejada

ILADES - Universidad Alberto Hurtado

Segundo Semestre de 2018

Introducción

- Hasta ahora hemos supuesto que podemos caracterizar los modelos usando un agente representativo (AR).
  - Si los agentes son idénticos, entonces la agregación es trivial.
  - Si los agentes no son idénticos, existen algunas condiciones que aseguran la representación AR (teorema de agregación de Gorman).
  - Sin embargo, cuando la heterogeneidad hace una diferencia significativa los modelo AR son restrictivos.
- Los modelos de agentes heterogéneos (AH) permiten estudiar un amplia conjunto de preguntas que el modelo de agente representativo no. Ejemplos:
  - Distribución del ingreso en el largo plazo y en el ciclo económico.
  - Efectos redistributivos y de bienestar de políticas macro (ej. impuestos).
  - El rol de la heterogeneidad en el efecto de la política macro (ej. efecto sobre los multiplicadores fiscales).
  - Productividad agregada y dinámica de firmas.

Introducción

- Dos tipos de modelos AH:
  - (1) Heterogeneidad ex-ante y
  - (2) Heterogeneidad ex-post.
- *Nos vamos a centrar en heterogeneidades por el lado de la familia.*
- Cuando la heterogeneidad es ex-ante y exógena (y además no cambia en el tiempo), el tratamiento y la solución de los modelos AH es bien similar a lo usado antes. *El principal tema es la agregación.*
- Cuando la heterogeneidad es ocurre ex-post de forma endógena el tratamiento es algo similar a lo usado antes pero los métodos de solución requieren de un esfuerzo (considerable) adicional. *El principal tema es la dinámica endógena de la distribución de la riqueza.*

El Equilibrio Competitivo Recursivo con AH

Familias

- Primero suponemos que las familias son ex-ante heterogéneas (la heterogeneidad es exógena).
- Suponga que existen N_j familias del tipo j (diferencias en preferencias, impaciencia, habilidades, etc).
- El problema de optimización de la familia j es:

$$\max_{\{c_{j,t},k_{j,t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta_j^t u_j(c_{j,t}, l_{j,t})$$

$$s.a\ c_{j,t} + k_{j,t+1} = (1 + q_t(\kappa_t) - \delta)k_{j,t} + w_t(\kappa_t)a_j l_{j,t}$$

$$k_{j,0}\ dado$$

- La distribución de riqueza de la economía es:

$$\kappa_t = (k_{1,t}, ..., k_{N,t})$$

  con k_j la riqueza de la familia j en equilibrio.
- La riqueza agregada se mueve de acuerdo a:

$$\kappa_{t+1} = \phi(\kappa_t)$$

El Equilibrio Competitivo Recursivo con AH(1)
Familias

- Representación recursiva: Las familias eligen c y k' dadas las funciones de precios $q(\kappa)$ y $w(\kappa)$, la restricción de recursos y la ley del movimiento de la riqueza agregada.

$$v_j(k_{j,t}, \kappa_t) = \max_{c_{j,t}, k_{j,t+1}} \{u_j(c_{j,t}, l_{j,t}) + \beta_j v_j(k_{j,t+1}, \kappa_{t+1})\}$$
$$s.a \; c_{j,t} + k_{j,t+1} = [1 + q_t(\kappa_t) - \delta] \, k_{j,t} + w_t(\kappa_t) a_j l_{j,t}$$

- Condiciones de primer orden para $c_{j,t}$ and $l_{j,t}$:

$$\frac{\partial u_j(c_{j,t}, l_{j,t})}{\partial c_{j,t}} = \beta_j \frac{\partial v_j(k_{j,t+1}, \kappa_{t+1})}{\partial k_{j,t+1}}$$
$$\frac{\partial u_j(c_{j,t}, l_{j,t})}{\partial l_{j,t}} = \beta_j \frac{\partial v_j(k_{j,t+1}, \kappa_{t+1})}{\partial k_{j,t+1}} w_t(\kappa_t)$$

  Note que los agente requiere anticipar $\kappa_{t+1} = \phi(\kappa_t)$ para resolver su problema (esta es la ley de movimiento percibida por la familia j).

- Teorema de la envolvente:

$$v_j(k_{j,t}, \kappa_t) = \frac{\partial u_j(c_{j,t}, l_{j,t})}{\partial c_{j,t}} [1 + q_t(\kappa_t) - \delta]$$

El Equilibrio Competitivo Recursivo con AH(1)
Familias

- Note que tenemos j problemas similares y por tanto tendremos j soluciones.
- La solución del problema de la familia j es:
  - Función valor $v_j(k_{j,t}, \kappa_t)$
  - Funciones de política:

$$k_{j,t+1} = h_j(k_{j,t}, \kappa_t)$$
$$l_{j,t} = \ell_j(k_{j,t}, \kappa_t)$$
$$c_{j,t} = g_j(k_{j,t}, \kappa_t)$$

- Esta solución satisface:
  - $v_j(k_{j,t}, \kappa_t)$ es el punto fijo de la ecuación de Bellman dadas h_j, ℓ_j y g_j.
  - h_j, ℓ_j y g_j *maximizan* la ecuación de Bellman.

El Equilibrio Competitivo Recursivo con AH(1)
Empresas

- Suponemos que existe una firma representativa que maximiza su beneficio eligiendo capital y trabajo:

$$\max F(K_t(\kappa_t), L_t(\kappa_t)) - w_t(\kappa_t)L_t(\kappa_t) - q_t(\kappa_t)K_t(\kappa_t)$$

- Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial F(K_t(\kappa_t), L_t(\kappa_t))}{\partial L_t(\kappa_t)} = w_t(\kappa_t)$$
$$\frac{\partial F(K_t(\kappa_t), L_t(\kappa_t))}{\partial K_t(\kappa_t)} = q_t(\kappa_t)$$

- La solución de este problema son la funciones de demanda condicional para el capital y el trabajo $L_t(\kappa_t)$ y $K_t(\kappa_t)$.

El Equilibrio Competitivo Recursivo con AH(1)
Clareo de Mercado

- Mercado de bienes:

$$F(K_t(\kappa_t), L_t(\kappa_t)) + (1-\delta)K_t(\kappa_t) = \sum_j N_j \left[g_j(k_{j,t}, \kappa_t) + h_j(k_{j,t}, \kappa_t)\right]$$

- Mercado de trabajo:

$$L_t(\kappa_t) = \sum_j N_j \ell_j(k_{j,t}, \kappa_t)$$

- Mercado de capital:

$$K_t(\kappa_t) = \sum_j N_j k_{j,t}$$

- Finalmente, las decisiones deben ser consistentes con el agregado:

$$(k_{1,t+1}, ..., k_{N,t+1}) = \phi(k_{1,t}, ..., k_{N,t})$$
$$(h_1(k_{1,t}, \kappa_t), ..., h_N(k_{N,t}, \kappa_t)) = \phi(\kappa_t)$$

- Supongamos que existen 3 tipos de agentes: $a_1 = a_l$, $a_2 = a_m$ y $a_3 = a_h$, con $a_h > a_m > a_l$.
- Existe una maza μ_j con $j = l, m, h$ de cada tipo de agente. Podríamos pensar que $\mu_l > \mu_m > \mu_h$. Ejemplo $\mu = (0.65, 0.25, 0.1)$.
- El problema de optimización de la familia j es:

$$\max_{\{c_{j,t}, l_{j,t}, k_{j,t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\gamma \log c_{j,t} + (1-\gamma)\log(1 - l_{j,t})\right)$$
$$s.a \; c_{j,t} + k_{j,t+1} = (1 + q_t(\kappa_t) - \delta)k_{j,t} + w_t(\kappa_t)a_j l_{j,t}$$
$$k_{j,0} \; dado$$

con $j = l, m, h$.
- La distribución es: $\kappa_t = (k_{h,t}, k_{m,t}, k_{l,t})$. Note que todos los agentes del mismo tipo acumulan el mismo nivel de capital.

- Las CPO para la solución interior son:

$$\begin{aligned}
\frac{c_{j,t+1}}{c_{j,t}} &= \beta(1 + q_{t+1}(\kappa_{t+1}) - \delta) \\
\frac{1-\gamma}{1-l_{j,t}} &= \frac{\gamma}{c_{j,t}} a_j w_t(\kappa_t) \\
c_{j,t} + k_{j,t+1} &= (1 + q_t(\kappa_{t+1}) - \delta)k_{j,t} + a_j w_t(\kappa_t) l_{j,t}
\end{aligned}$$

- La condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t c_{j,t}^{-1} k_{j,t+1} = 0$$

- Dados q y w, estos son tres problemas independientes. Implicaciones:
  - Note que la asignación de consumo entre el presente y el futuro (ahorro) es idéntica para los tres tipos de agentes.
  - El nivel de consumo y la oferta laboral van a diferir entre consumidores (algunos agentes ganan más).
- Esta especificación explica diferencias de consumo y oferta laboral pero no de ahorro (¿qué sucede con preferencias heterogéneas?)

El Equilibrio Competitivo Recursivo con AH(1)

Ejemplo 1: Habilidades intrínsecas heterogéneas

- El problema de las firmas es:

$$\max AK_t(\kappa_t)^{\alpha} L_t(\kappa_t)^{1\text{-}\alpha} - w_t(\kappa_t)L_t(\kappa_t) - q_t(\kappa_t)K_t(\kappa_t)$$

- Condiciones de primer orden:

$$\alpha AK_t(\kappa_t)^{\alpha-1} L_t(\kappa_t)^{1\text{-}\alpha} = \alpha \mathsf{A}\left[\frac{L_t(\kappa_t)}{K_t(\kappa_t)}\right]^{1\text{-}\alpha} = q_t(\kappa_t)$$

$$(1-\alpha)\, AK_t(\kappa_t)^{\alpha} L_t(\kappa_t)^{\alpha} = (1-\alpha)\mathsf{A}\left[\frac{K_t(\kappa_t)}{L_t(\kappa_t)}\right]^{\alpha} = w_t(\kappa_t)$$

- Clareo de mercado:

$$K_t(\kappa_t) = \mu_l k_{l,t} + \mu_m k_{m,t}, \mu_h k_{h,t}$$
$$L_t(\kappa_t) = \mu_l l_{l,t} + \mu_m l_{m,t} + \mu_h l_{m,t}$$

- Note que este tipo de problemas sólo el capital agregado termina siendo relevante.
- Podemos resolver el problema usando programación dinámica o control óptimo. También podemos usar métodos de perturbación.

El Equilibrio Competitivo Recursivo con AH(1)

Ejemplo 1: Habilidades intrínsecas heterogéneas

- Resumimos el modelo como sigue (eliminamos κ para simplificar notación):

$$\begin{aligned}
\frac{c_{j,t+1}}{c_{j,t}} &= \beta(1+q_{t+1}-\delta), \quad j=l,m,h \\
\frac{1-\gamma}{1-l_{j,t}} &= \frac{\gamma}{c_{j,t}} a_j w_t(\kappa_t), \quad j=l,m,h \\
c_{j,t}+k_{j,t+1} &= (1+q_t-\delta)k_{j,t} + a_j w_t l_{j,t}, \quad j=l,m,h \\
\alpha\mathsf{A}\left[\frac{L_t}{K_t}\right]^{1\text{-}\alpha} &= q_t \\
(1-\alpha)\mathsf{A}\left[\frac{K_t}{L_t}\right]^{\alpha} &= w_t \\
K_t &= \mu_l k_{l,t} + \mu_m k_{m,t}, \mu_h k_{h,t} \\
L_t &= \mu_l l_{l,t} + \mu_m l_{m,t} + \mu_h l_{m,t}
\end{aligned}$$

- El equilibrio está dado por las secuencias $c_{j,t}, l_{j,t}, k_{j,t+1}$ con $j=l,m,h$ y las secuencias de precios q_t y w_t que satisfacen el sistema de ecuaciones en diferencias arriba.

El Equilibrio Competitivo Recursivo con AH(1)

Ejemplo 2: RBC con Agentes Ricardianos y no Ricardianos

- Existen dos tipos de agente:
  - Ricardianos: Agentes que tienen acceso a la tecnología de ahorro (existe una masa μ de estos agentes).
  - No Ricardianos: Agente que consume su ingreso (hand-to-mouth, existe una masa $1-\mu$ de estos agentes)
- Problema de los agentes Ricardianos:

$$\max_{\{c_{R,t}, l_{R,t}, k_{R,t+1}\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\gamma \log c_{R,t} + (1-\gamma)\log(1-l_{R,t})\right)$$
$$s.a\; c_{R,t} + k_{R,t+1} = (1+q_t(\kappa_t)-\delta)k_{R,t} + w_t(\kappa_t)l_{R,t}$$
$$k_{R,0}\; dado$$

- Problema de los agentes no ricardianos:

$$\max_{\{c_{NR,t}, l_{NR,t}\}_{t=0}^{\infty}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\gamma \log c_{NR,t} + (1-\gamma)\log(1-l_{NR,t})\right)$$
$$s.a\; c_{NR,t} = w_t(\kappa_t)l_{NR,t}$$
$$k_{NR,0}\; dado$$

El Equilibrio Competitivo Recursivo con AH(1)

Ejemplo 2: RBC con Agentes Ricardianos y no Ricardianos

- Condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c_{R,t}} &= E_t \left[\frac{\beta}{c_{R,t+1}}(1+q_{t+1}(\kappa_{t+1})-\delta)\right] \\
\frac{1-\gamma}{1-l_{R,t}} &= \frac{\gamma}{c_{R,t}} w_t(\kappa_t) \\
c_{R,t} + k_{R,t+1} &= (1+q_t(\kappa_{t+1})-\delta)k_{R,t} + w_t(\kappa_t)l_{R,t} \\
\frac{1-\gamma}{1-l_{NR,t}} &= \frac{\gamma}{c_{NR,t}} w_t(\kappa_t) \\
c_{NR,t} &= w_t(\kappa_t)l_{NR,t}
\end{aligned}$$

- La condición de transversalidad opera sólo para los agentes Ricardianos:

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t c_{R,t}^{-1} k_{R,t+1} = 0$$

- La distribución es degenerada: $\kappa_t = k_{R,t}$.

El Equilibrio Competitivo Recursivo con AH(1)

Ejemplo 2: RBC con Agentes Ricardianos y no Ricardianos

- El problema de las firmas es el estándar. Las condiciones de primer orden son:

$$\alpha A_t \left[\frac{L_t(\kappa_t)}{K_t(\kappa_t)}\right]^{1-\alpha} = q_t(\kappa_t)$$
$$(1-\alpha)\, A_t \left[\frac{K_t(\kappa_t)}{L_t(\kappa_t)}\right]^{\alpha} = w_t(\kappa_t)$$

  donde A_t sigue un proceso AR(1).

- Clareo de mercado:

$$K_t(\kappa_t) = \mu k_{R,t}$$
$$L_t(\kappa_t) = \mu l_{R,t} + (1-\mu) l_{NR,t}$$

- Agregación:

$$C_t(\kappa_t) = \mu c_{R,t} + (1-\mu) c_{NR,t}$$
$$I_t(\kappa_t) = \mu i_{R,t} = k_{R,t+1} - (1-\delta) k_{R,t}$$
$$Y_t(\kappa_t) = C_t(\kappa_t) + I_t(\kappa_t)$$

- El equilibrio está dado por las secuencias $c_{j,t}, l_{j,t}, k_{R,t+1}$ con $j = R, NR$ y las secuencias de precios q_t y w_t.

El Equilibrio Competitivo Recursivo con AH(2)

- Modelo de Ayagari (1994, 1995): Modelo neoclásico de crecimiento con riesgo idiosincrático (pero no con riesgo agregado).
- En la economía los agentes pueden estar empleados o desempleados y no pueden asegurarse respecto al riesgo de desempleo (pueden perder su empleo en cualquier momento).
- Al encarar riesgo los agentes decidirán ahorrar de acuerdo a su historia de empleo (que será distinta para cada individuo). Esto lleva a una distribución de riqueza endógena en el *equilibrio estacionario o de largo plazo*.
- Tendremos tres tipos de agentes en el modelo: (1) familias, (2) firmas y (3) gobierno.

El Modelo de Ayagari (1994)
Familias

- Considere un continuo de agentes que viven al infinito y que tiene totalizan una masa igual a 1.
- Cada familia está formada por un sólo agente y las familias difieren en su estatus laboral y en los activos que mantiene.
- La función de utilidad a lo largo de toda la vida es:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

con $\beta \in (0,1)$ y $u(\cdot)$ con las propiedades usuales. En general usaremos $u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ con $\sigma > 0$.
- En el momento 0 la riqueza da cada familia es a_0 y su estatus laboral es $\epsilon_0 \in \{1, 0\}$. Cada familia está dotada de una unidad de trabajo.
- Ingreso:

$$e : \epsilon = 1 \longrightarrow w_t$$
$$u : \epsilon = 0 \longrightarrow s_t$$

con $(1-\tau)w_t > s_t$ y τ la tasa de impuesto.

El Modelo de Ayagari (1994)
Familias

- El estatus laboral es aleatorio y evoluciona de acuerdo a una cade de Markov.

$$\pi(\epsilon'|\epsilon) = \Pr\left[\epsilon_{t+1} = \epsilon' | \epsilon_t = \epsilon\right] = \begin{bmatrix} p_{uu} & p_{ue} \\ p_{eu} & p_{ee} \end{bmatrix}$$

- *Convención:* (1) variables agregadas: mayúsculas y (2) variables individuales: minúsculas (excepto precios)
- La restricción presupuestaria de una familia típica es:

$$k_{t+1} = \begin{cases} [1 + (1-\tau)(q_t - \delta)]\, k_t + (1-\tau)w_t - c_t & si\, \epsilon_t = 1 \\ [1 + (1-\tau)(q_t - \delta)]\, k_t + s_t - c_t & si\, \epsilon_t = 0 \end{cases}$$

- Adicionalmente, los agentes están restringidos en términos de la deuda que pueden adoptar:

$$k_t \geq k_{min} = 0$$

El Modelo de Ayagari (1994)

Familias

- Representación recursiva del problema:

$$v(k,\epsilon;K) = \max\left\{u(c) + \beta E\left[v(k',\epsilon';K)|\epsilon\right]\right\}$$

$$s.a$$

$$k' + c = \left[1 + (1-\tau)(q(K)-\delta)\right]k + (1-\tau)\epsilon w(K) + (1-\epsilon)s(K)$$

$$k \geq 0$$

$$\pi(\epsilon'|\epsilon) = \begin{bmatrix} p_{uu} & p_{ue} \\ p_{eu} & p_{ee} \end{bmatrix}$$

$$k_0, \epsilon_0 \;\; dados.$$

- La solución del problema de la familia típica es un set de funciones de política:

$$c = h(k,\epsilon;K)$$
$$k' = g(k,\epsilon;K)$$

y la función valor:

$$v(k,\epsilon;K)$$

El Modelo de Ayagari (1994)

Firmas y gobierno

- Nada nuevo por el lado de las firmas:

$$\max K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - w_t(K_t)L_t - q_t(K_t)K_t$$

cuyas condiciones de primer orden son:

$$q_t = \alpha\left(\frac{L_t}{K_t}\right)^{1-\alpha}$$
$$w_t = (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha}$$

- Restricción presupuestaria del gobierno:

$$(1-L_t)s_t = \tau\left[L_t w(K_t) + K_t\left(q(K_t)-\delta\right)\right]$$

El Modelo de Ayagari (1994)

Equilibrio de Estado Estacionario

- En el equilibrio de largo plazo, el stock agregado de capital (K) así como los precios de los factores (q, w) son constantes.
- Además, la *distribución de riqueza* es también constante, tanto para desempleados como para empleados (distribuciones invariantes).

$$F(k, \epsilon) = \begin{cases} F(k, 1) & e \\ F(k, 0) & u \end{cases}$$

Note que es espacio de estados es:

$$(k, \epsilon) \in \{0, 1\} \times [k_{min} = 0, \infty]$$

- Finalmente, el número de desempleado y de empleados también es constate.

El Modelo de Ayagari (1994)

Equilibrio de Estado Estacionario

- Usando la distribución invariante podemos entonces calcular los agregados de la economía.

$$K = \int_0^\infty k f(k, 0) dk + \int_0^\infty k f(k, 1) dk$$
$$L = \int_0^\infty k f(k, 1) dk$$
$$C = \int_0^\infty h(k, 0; K) f(k, 0) dk + \int_0^\infty h(k, 1; K) f(k, 1) dl$$

- ¿Cómo evolucionan las distribuciones $F(k, \epsilon)$? De forma consistente con las funciones de política:

$$F(k', \epsilon') = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}} \pi(\epsilon' | \epsilon) F(k, \epsilon)$$
$$= \sum_{\epsilon \in \{0,1\}} \pi(\epsilon' | \epsilon) F(g^{-1}(k', \epsilon), \epsilon)$$

recuerde que: $k' = g(k, \epsilon; K)$ y dado K tenemos que $k = g^{-1}(k', \epsilon)$ (inversa de la función de política).

El Modelo de Ayagari (1994)

Algoritmo Computacional para la solución del Modelo

1. Calcular el empleo en estado estacionario L_{ss}.

$$L_t = p_{ue}(1 - L_{t-1}) + p_{ee}L_{t-1} \longrightarrow L_{ss} = \frac{p_{ue}}{1 + p_{ue} - p_{ee}}$$

2. Hacer una conjetura inicial sobre K_0.
3. Calcular el salario y la tasa de interés bajo la conjetura:

$$q_0 = \alpha \left(\frac{L_{ss}}{K_0}\right)^{1-\alpha}$$
$$w_0 = (1-\alpha)\left(\frac{K_0}{L_{ss}}\right)^{\alpha}$$

4. Calcular la tasa de impuesto que satisface la restricción presupuestaria del gobierno bajo la conjetura.

$$(1 - L_{ss})s_0 = \tau_0 \left[L_{ss}w_0 + K_0 \left(q_0 - \delta\right)\right] \longrightarrow \tau_0$$

donde suponemos que el seguro de cesantía paga un porcentaje del salario (tasa de reposición):$s_0 = \mu w_0$

El Modelo de Ayagari (1994)

Algoritmo Computacional para la solución del Modelo

5. Calcular las funciones de política para las familias bajo la conjetura:

$$c = h_0(k, \epsilon; K_0)$$
$$k' = g_0(k, \epsilon; K_0)$$

Para este paso se puede usar iteración de la función valor (o eventualmente algún método de perturbación para una solución aproximada).

6. Dadas las funciones de política, calcular la distribución de activos de estados estacionario tanto para agentes empleados como desempleados. Iterar a partir de una conjetura inicial:

$$F_{0,j+1}(k', \epsilon') = \sum_{\epsilon \in \{0,1\}} \pi(\epsilon'|\epsilon)F_{0,j}(g^{-1}(k', \epsilon), \epsilon)$$

Nota: Se requiere invertir la función de política: $k = g^{-1}(k', \epsilon)$.

7. Dada la distribución invariante, calcular el stock de capital consistente con dicha distribución (K_1)

$$K_1 = \int_0^\infty k f_0(k,0)dk + \int_0^\infty k f_0(k,1)dk$$

8. Comparar la conjetura inicial K_0 con los valores obtenidos en equilibrio K_1.
   - Si son iguales, entonces el equilibrio ha sido hallado.
   - Si son diferentes, volver al paso 2 reemplazando la conjetura inicial por K_1 (o algún porcentaje del desequeilibrio $K_{new} = K_0 + step(K_1 - K_0)$).